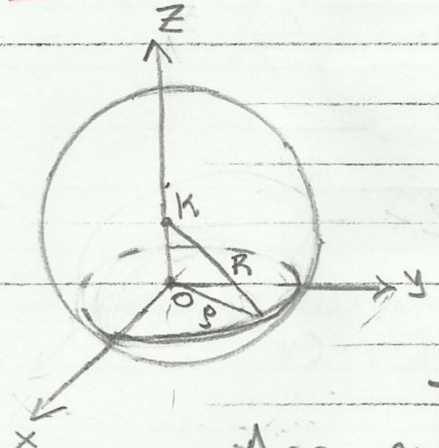
Ασκηση 1η:

Να βρεθεί η εξίσωση της σφαίρας που διέρχεται από το σημείο $A(8,15,10)$ και κόβει το xOy σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho=7$.

ΛΥΣΗ



Ο κυκλος είναι της μορφης

$$(c):\begin{cases}(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2\\ z=0\end{cases}$$

Προφανως το κεντρο της σφαίρας είναι το σημείο $K(0,0,\gamma)$

Αρα, η σφαίρα έχει εξίσωση

$x^2+y^2+(z-\gamma)^2=R^2$ και αφου περνά απ' το A τότε θα γίνει

$$8^2+15^2+(10-\gamma)^2=R^2 \quad (1)$$

ομως, το $R^2=\rho^2+(OK)^2 \Rightarrow R^2=\gamma^2+49 \quad (2)$

Αρα, από τη (2) $\rightarrow$ (1) είναι

$$64+225+(10-\gamma)^2=\gamma^2+49 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{\gamma^2}-20\gamma+100-\cancel{\gamma^2}+240=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20\gamma=340 \Rightarrow \boxed{\gamma=17}.$$

και έτσι στη (2) είναι:

$$R^2=17^2+49=289+49=338.$$

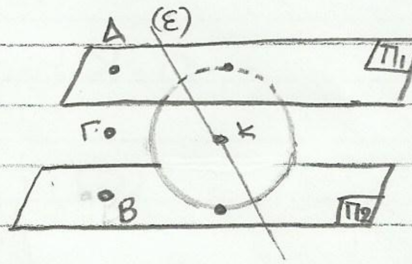
Επομενως, η σφαίρα θα έχει εξίσωση:

$$x^2+y^2+(z-17)^2=338.$$

Άσκηση 2η

Να βρεθεί η εξίσωση της σφαίρας που εφάπτεται στα επίπεδα: $(\Pi_1): x+y+z=3$, $(\Pi_2): x+y+z=9$, καθώς το κέντρο της βρίσκεται στην ευθεία:

$$(\varepsilon_1): \begin{cases} 2x-y=0 \\ 3x-z=0. \end{cases}$$



ΛΥΣΗ

Έστω $K(\alpha,\beta,\gamma)$ και R, το κέντρο και η ακτίνα της σφαίρας αντιστοίχως. Άρα, $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2$. (*)

Αφού, το $K \in (\varepsilon)$ τότε:

$$\begin{cases} 2\alpha-\beta=0 \\ 3\alpha-\gamma=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{ll} \beta=2\alpha & (1) \\ \gamma=3\alpha & (2) \end{array}$$

Αρκεί, να βρούμε μια 3η σχέση μεταξύ των α,β,γ.

Έστω, το μεσοπαράλληλο επίπεδο που το φτιάχνουμε να διέρχεται από το K και να είναι παράλληλο στα (Π_1) & (Π_2).

Τότε αφού το (Π_1) διέρχεται από το $A(1,1,1)$ και το (Π_2) διέρχεται από το $B(3,3,3)$ τότε το νέο επίπεδο που ορίσαμε θα είναι της μορφής $(\Pi): x+y+z=6$. ώστε να διέρχεται από το $\Gamma(2,2,2)$ με Γ το μέσον των A & B. αλλά, το (Π) διέρχεται και από το K. Άρα, $\alpha+\beta+\gamma=6$ (3).

Από, τις (1), (2), (3) $\Longrightarrow$ $\alpha=1$, $\beta=2$ & $\gamma=3$

Τέλος, για την εύρεση της ακτίνας, θα πούμε:

$$d(A,\Pi_2)=\frac{|1+1+1-9|}{\sqrt{3}}=\frac{6}{\sqrt{3}}=2R \Rightarrow R=\sqrt{3}.$$

$$(*) \rightarrow (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=3.$$